

利用 D'Alembert 函数方程定义余弦函数

汲绍达

(西安交通大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710049)

摘 要 参考文献[2]采用附加连续性条件的方式确定 d'Alembert 函数方程的解函数,本文则用一些更加初等的条件代替此条件,本质上从单调性的角度限制和确定了方程的解,其目的是给出实直线上余弦函数的初等定义.

关键词 函数方程; 余弦函数; 单调性; 零点; 稠密性; Hamel 基

中图分类号 O174.1

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2023)05-0077-03

Defining Cosine Function with D'Alembert's Functional Equation

Ji Shaoda

(School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract While reference [2] determines the solution functions of d'Alembert's functional equation by means of additional continuity conditions, this paper replaces the condition with more elementary ones, essentially determining the solutions from monotonicity, with the aim of giving an elementary definition of cosine function on the real line.

Keywords function equation, cosine function, monotonicity, zeros, density, Hamel basis

我们考虑在实数域 $\mathbf{R}$ 上定义的满足 d'Alembert 函数方程的函数 f

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

满足此方程的函数有无穷多个. 这是因为如果能找到满足 Cauchy 函数方程

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

的函数 φ , 则有

$$\begin{aligned} \cos(\varphi(x+y)) + \cos(\varphi(x-y)) \\ = \cos(\varphi(x) + \varphi(y)) + \cos(\varphi(x) - \varphi(y)) \\ = 2\cos(\varphi(x))\cos(\varphi(y)), \end{aligned}$$

即函数 $\cos \circ \varphi$ 满足 d'Alembert 函数方程. 但 Cauchy 方程的解可以十分“稀奇古怪”, 详细的构造过程见文末评注.

由于仅凭 d'Alembert 方程本身无法确定余弦函数, 我们需要添加附加条件. 参考文献[2]添加了如下三个条件从而确定余弦函数:

(1) f 不是常值函数;

(2) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续;

(3) $|f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

我们不去添加连续性这一很强的条件, 转而探索如何添加尽量少、尽量弱的初等条件, 力求给出余弦函数的初等定义.

在 d'Alembert 方程中, 令 $y=0$, 得 $2f(x) = 2f(x)f(0)$. 从而若 $f(0)=0$, 则 $f=0$. 这是平凡解, 所以我们要附加 $f(0) \neq 0$ 的条件. 又令 $x=y=0$, 得 $2f(0) = 2f^2(0)$, 故 $f(0)=1$.

注意到双曲余弦函数 $\cosh$ 也满足 d'Alembert 方程, 且它在 $\mathbf{R}$ 上没有零点. 在 $\mathbf{R}$ 上有无零点是它与余弦函数 $\cos$ 的一大本质区别, 因此我们要附加 f 在 $\mathbf{R}$ 上存在零点的条件.

记 $S := \{x \in \mathbf{R} : f(x) = 0\}$ 为 f 的零点构成的全体. 任取 $a \in S$, 在 d'Alembert 方程中令 $x=a$, 得 $f(a+y) + f(a-y) = 0$, 即 f 关于点 $(a, 0)$ 中心对称. 因此, 若 $x, y \in S$, 则 $2y-x \in S$.

在 d'Alembert 方程中令 $x=0$, 由于 $f(0)=1$, 故 $f(y) = f(-y)$, 即 f 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数. 因此, 若 $x \in S$, 则 $-x \in S$, 进而对于任意 $k \in \mathbf{Z}$, 有 $(2k-1)x \in S$. 如果 $S \cap (0, +\infty)$ 没有正下界, 则存在 $S \cap (0, +\infty)$ 中的

收稿日期: 2022-03-08

修改日期: 2022-05-19

作者简介: 汲绍达(2003-), 男, 安徽蚌埠人, 数学专业 2021 级本科生, Email: frankjii@sina.com.

一列点 $\{x_n\}$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 进而对于任意 $k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$, 有 $(2k-1)x_n \in S$, 说明 S 在 $\mathbf{R}$ 中稠密. 由评注知存在目前条件下的解函数 f_1 不是余弦函数, 且其零点构成的全体在 $\mathbf{R}$ 中稠密. 因此我们要附加 f 的正零点有正下界的条件.

我们断言, $S \cap (0, +\infty)$ 存在最小值. 否则设 $\inf(S \cap (0, +\infty)) = c > 0$, 则存在 $S \cap (0, +\infty)$ 中异于 c 一列点 $\{y_n\}$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$. 而 $\forall x, y \in S$, 有 $2y - x \in S$. 故 S 在 $\mathbf{R}$ 中稠密, 与 $S \cap (0, +\infty)$ 有正下界的条件矛盾. 因此

$$\inf(S \cap (0, +\infty)) = \min(S \cap (0, +\infty)) = c.$$

事实上, 以上三个条件还不足以确定余弦函数, 反例见评注中的函数 f_2 . 我们来探索最后应该添加什么样的条件.

在 d'Alembert 方程中, 令 $u = x + y, v = x - y$, 得

$$f(u) + f(v) = 2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

又令 $w = 2c - v$, 结合 f 的中心对称性和偶性知

$$f(u) - f(w) = -2f\left(c - \frac{u-w}{2}\right)f\left(c - \frac{u+w}{2}\right).$$

如果我们附加 f 在开区间 $(0, c)$ 上不变号的条件, 并限制 $0 \leq w < u \leq c$, 则有

$$f(u) - f(w) = -2f\left(c - \frac{u-w}{2}\right)f\left(c - \frac{u+w}{2}\right) \leq 0,$$

即 f 在闭区间 $[0, c]$ 上单调减.

单调性是一个函数很强的条件. 我们将会利用目前已给的如下 4 个附加条件论证 d'Alembert 方程在给定正常数 c 的前提下存在唯一解函数 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2c}x\right)$.

- (1) $f(0) \neq 0$;
- (2) f 在 $\mathbf{R}$ 上存在零点;
- (3) f 的正零点有正下界;
- (4) f 在 $(0, c)$ 上不变号.

对于任意的 $y \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned} f(c+y) &= -f(c-y) = -f(y-c) = -f(c+(y-2c)) \\ &= -(-f(c-(y-2c))) = f(y-3c). \end{aligned}$$

从而 f 以 $4c$ 为周期. 又因为 f 关于直线 $x = 2c$ 对称, 且关于 $(c, 0)$ 中心对称, 所以 $f|_{[0, c]}$, 即 f 在 $[0, c]$ 上的限制, 确定了 f 在 $\mathbf{R}$ 上的取值.

在 d'Alembert 方程中, 令 $x = y$, 得 $2f^2(x) = f(2x) + 1$. 又对于任意的 $x \in [0, c]$, $f(x) \geq f(c) = 0$, 故

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+f(x))}, \quad \forall x \in [0, c]$$

令 $x = c, \frac{c}{2}, \frac{c}{4}, \dots, \frac{c}{2^k}, \dots$ 便依次确定了 $f\left(\frac{c}{2^k}\right) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 的值.

又在 d'Alembert 方程中令 $y = \frac{c}{2^k}$, 得

$$f\left(x + \frac{c}{2^k}\right) = 2f(x)f\left(\frac{c}{2^k}\right) - f\left(x - \frac{c}{2^k}\right).$$

令 $x = \frac{c}{2^k}, 2\frac{c}{2^k}, \dots, \lambda\frac{c}{2^k}, \dots, (2^k-1)\frac{c}{2^k}$, 可依次确定 $f\left(t\frac{c}{2^k}\right) (k \geq 0, 0 \leq t \leq 2^k)$ 的值.

用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 给定 $m \in [0, c]$, 令 $\lambda = \left[\frac{2^k m}{c}\right]$, 则由不等式 $2^k \frac{m}{c} - 1 \leq \left[\frac{2^k m}{c}\right] \leq 2^k \frac{m}{c}$ 可得 $\lambda \frac{c}{2^k} \leq m \leq (\lambda+1) \frac{c}{2^k}$. 由于 f 在 $[0, c]$ 上递减, 故 $f\left(\lambda \frac{c}{2^k}\right) \geq f(m) \geq f\left((\lambda+1) \frac{c}{2^k}\right)$. 若证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(f\left(\lambda \frac{c}{2^k}\right) - f\left((\lambda+1) \frac{c}{2^k}\right)\right) = 0$, 结合 f 的单调性, f 在 m 处左右极限存在且相等, 从而 $f(m)$ 的值可被 c 唯一确定.

下面证明上述猜测. 在方程

$$f(u) - f(w) = -2f\left(c - \frac{u-w}{2}\right)f\left(c - \frac{u+w}{2}\right)$$

中, 令 $u = x \in [0, c], w = c$, 得 $f(x) = 2f\left(\frac{c+x}{2}\right)f\left(\frac{c-x}{2}\right)$. 又

$$f\left(\frac{c-x}{2}\right) \geq f\left(\frac{c}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+f(c))} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{故 } f(x) \geq \sqrt{2}f\left(\frac{c+x}{2}\right) = \sqrt{2}f\left(c - \frac{c-x}{2}\right).$$

依次用 $c - \frac{c-x}{2^i} (i = 1, 2, \dots, k-1)$ 代入 x , 合并得

$$f(x) \geq (\sqrt{2})^k f\left(c - \frac{c-x}{2^k}\right).$$

$$\text{再令 } x = 0, \text{ 得 } 0 \leq f\left(c - \frac{c}{2^k}\right) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

$$\text{回到 } f(u) - f(w) = -2f\left(c - \frac{u-w}{2}\right)f\left(c - \frac{u+w}{2}\right)$$

令 $u = \frac{\lambda c}{2^k}, w = \frac{(\lambda+1)c}{2^k}$, 得

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{\lambda c}{2^k}\right) - f\left(\frac{(\lambda+1)c}{2^k}\right) \\ &= -2f\left(c + \frac{c}{2^{k+1}}\right)f\left(c - \frac{(2\lambda+1)c}{2^{k+1}}\right) \\ &= 2f\left(c - \frac{c}{2^{k+1}}\right)f\left(c - \frac{(2\lambda+1)c}{2^{k+1}}\right) \\ &\leq 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} \cdot 1 = o(1), k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

在给定 4 个附加条件和正常数 c 后, 闭区间 $[0, c]$ 中任一点 m 处的函数值 $f(m)$ 被唯一确定, 从而在此条件下 d'Alembert 方程的解函数是存在唯一的, 即余弦函数 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2c}x\right)$.

注记 考虑 Cauchy 函数方程

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

我们将实数域 $\mathbf{R}$ 视作有理域 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间, 取一组基 $\{U_a\}$ (称为 Hamel 基), 则任意实数 r 可被唯一表示为 $\{U_a\}$ 中有限项的有理线性组合, 即 $r = \sum_a q_a^{(r)} U_a^{(r)}$, 其中 $q_a^{(r)} \neq 0$ 只对有限多个 a 成立, 而有理系数 $\{q_a^{(r)}\}$ 的选取是唯一的.

1 零点稠密的反例 f_1

不妨设 $\{U_a\}$ 中存在一列成员 $\{U_i\} \rightarrow 0$, 否则取一列衰减足够快的非零有理收敛因子 $\{q_i\}$ 使 $\{q_i U_i\} \rightarrow 0$. 注意到将 $\{U_i\}$ 替换为 $\{q_i U_i\}$ 能保持 $\{U_a\}$ 的线性无关性. 定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 φ_1 满足 $\varphi_1(U_i) = \frac{\pi}{2}, \forall i$, 其它基的像任意选取.

任取 $x, y \in \mathbf{R}$, 存在 $\{U_a\}$ 中有限多个成员 $\{U_i^{(x,y)}\}$, 使得

$$x = \sum_{i=1}^{n_{x,y}} k_i^{(x)} U_i^{(x,y)}, y = \sum_{i=1}^{n_{x,y}} k_i^{(y)} U_i^{(x,y)},$$

其中 $k_i^{(x)}, k_i^{(y)} \in \mathbf{Q}$. 两式相加得

$$x + y = \sum_{i=1}^{n_{x,y}} (k_i^{(x)} + k_i^{(y)}) U_i^{(x,y)}.$$

若规定

$$\varphi_1(r) := \sum_a q_a^{(r)} \varphi_1(U_a^{(r)}), \forall r \in \mathbf{R}$$

其中 $r = \sum_a q_a^{(r)} U_a^{(r)}$ 为前文所述的标准分解式, 读者可自行验证这是良定义的, 且在此定义下有 $\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$, 即 φ_1 满足 Cauchy 方程. 令 $f_1 := \cos \circ \varphi_1$, 则由文首知 f_1 满足 d'Alembert 方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

而且 $f_1(U_i) = \cos(\varphi_1(U_i)) = 0, \forall i$, 因此 f_1 的零点在 $\mathbf{R}$ 中稠密, 符合反例的要求.

2 以 c 为最小正零点, 且在 $(0, c)$ 改变符号的反例 f_2

我们将找到一组新的 Hamel 基 $\{U_a\}$, 并定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 φ_2 , 使得以下陈述同时成立:

- (1) $U_1, U_2 \in (0, c)$;
- (2) $\cos(\varphi_2(U_1)) > 0 > \cos(\varphi_2(U_2))$;
- (3) $\{\varphi_2(U_a)\}$ 为一组 Hamel 基;

$$(4) \varphi_2(c) = \frac{\pi}{2}.$$

首先容易找到异于 c 和 $\frac{\pi}{2}$ 且同时满足 (1)(2) 的 U_1, U_2 , 并定义 φ_2 在 U_1, U_2 处的函数值使得 $\frac{\varphi_2(U_1)}{U_1}, \frac{\varphi_2(U_2)}{U_2} \in \mathbf{Q}^*$, 在此不作赘述.

(i) 若 c 和 $\frac{\pi}{2}$ 线性相关, 则在上述 U_1, U_2 的选择时附加要求 $\{c, U_1, U_2\}$ 线性无关. 我们将向量组 $\{c, U_1, U_2\}$ 扩张为一组 Hamel 基 $\{U_a\}$, 规定 $\varphi_2(c) = \frac{\pi}{2}$ 且 φ_2 保持扩张的基不动;

(ii) 若 c 和 $\frac{\pi}{2}$ 线性无关, 则在上述 U_1, U_2 的选择时附加要求 $\{c, \frac{\pi}{2}, U_1, U_2\}$ 线性无关. 我们将其扩张为一组 Hamel 基 $\{U_a\}$, 规定 φ_2 交换 c 和 $\frac{\pi}{2}$ 并保持扩张的基不动. 于是 (3)(4) 也得到了满足. 此时仍规定

$$\varphi_2(r) := \sum_a q_a^{(r)} \varphi_2(U_a^{(r)}), \forall r \in \mathbf{R}$$

其中 $r = \sum_a q_a^{(r)} U_a^{(r)}$ 为标准分解式. 同上一个反例知 φ_2 也满足 Cauchy 方程.

任取 $x, y \in \mathbf{R}$, 存在上述构造的 $\{U_a\}$ 中有限者

$\{U_i^{(x,y)}\}$ 使得 $x = \sum_{i=1}^{n_{x,y}} k_i^{(x)} U_i^{(x,y)}, y = \sum_{i=1}^{n_{x,y}} k_i^{(y)} U_i^{(x,y)}$. 若 $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n_{x,y}} (k_i^{(x)} - k_i^{(y)}) \varphi_2(U_i^{(x,y)}) = 0.$$

又 $\{\varphi_2(U_a)\}$ 为一组 Hamel 基, 故 $k_i^{(x)} = k_i^{(y)}$ 恒成立, 即 $x = y$, 由此 φ_2 是单射. 任取 $r \in (0, c), k \in \mathbf{Z}$, 有 $r \neq (2k-1)c$, 这等价于 $\varphi_2(r) \neq \varphi_2((2k-1)c) = (2k-1) \frac{\pi}{2}$.

故 $\cos(\varphi_2(r)) \neq 0, \forall r \in (0, c)$.

令 $f_2 := \cos \circ \varphi_2$, 则由文首知 f_2 满足 d'Alembert 方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

且 f_2 在 $(0, c)$ 上无零点, $f_2(c) = 0, f_2(U_1) > 0 > f_2(U_2)$, 符合反例的要求.

参考文献

- [1] 菲赫金哥尔兹. 微积分学教程: 第一卷[M]. 8 版. 杨弢亮, 叶彦谦, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 130-132.
- [2] David Nocar, Tomáš Zdráhal. MATHEMATICA V. Scientific Issues. Publisher: VERBUM-Catholic University in Ruzomberok, 2015: 77-82.